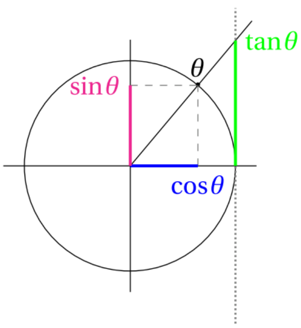
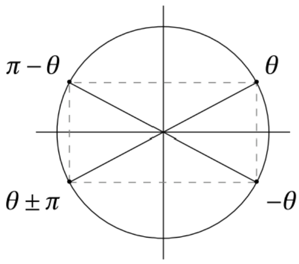
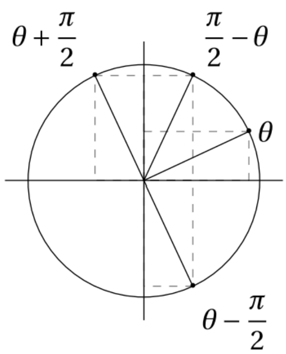
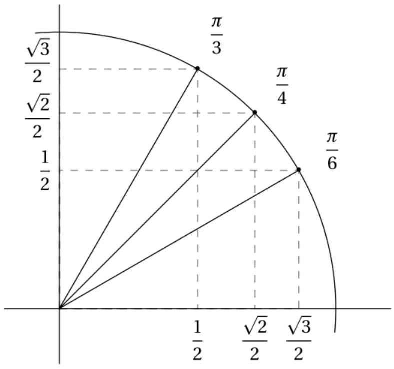
Fiche de Trigonométrie

Cette fiche est un complément à celle disponible sur Moodle.

Cercle trigonométrique, périodicité et symétries

Périodicité/ parité/imparité	Demi-tour (in)direct	Quart de tour (indirect)
		
$\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$ $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$ $\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ (parité) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ (imparité) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\theta\pm\pi)=-\cos\theta$ $\sin(\theta\pm\pi)=-\sin\theta$	$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$ $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$ $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

Valeurs remarquables

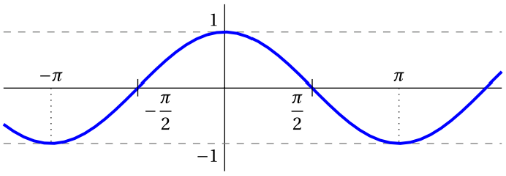


θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	pas de déf

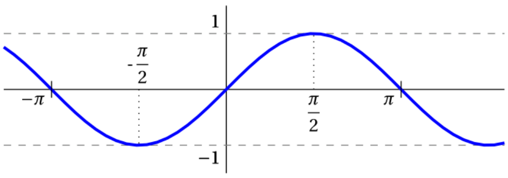
NB : d'autres valeurs s'en déduisent par symétrie. Exemple :

- $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$ donc $\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi$ donc $\sin(\frac{3\pi}{2})=-1$.

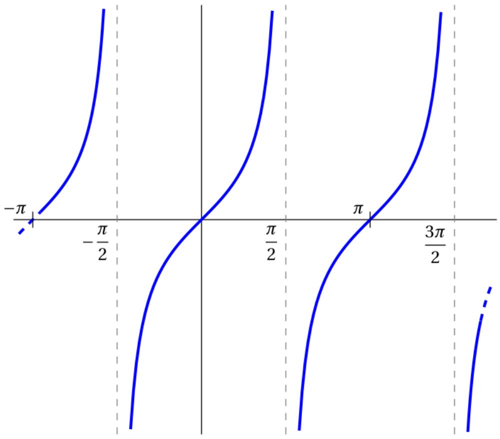
Graphes



$y = \cos x$



$y = \sin x$



$y = \tan x$

Remarque: Ce sont les graphes de fonctions $y = \text{trigo}(x)$. Il ne faut pas les confondre avec le cercle trigonométrique.

Quelques formules (parmi beaucoup d'autre)

Définition de tangente:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

L'identidé

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

En divisant tous les termes par $\cos^2\theta$, on obtient $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.
Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b, \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de duplication: En posant $a = b$:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a, \quad \sin(2a) = 2\sin a\cos a, \quad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formules dérivées: Comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient :

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

En posant $t = \dfrac{a}{2}$:

$$1 + \cos t = 2\cos^2\tfrac{t}{2}, \quad 1 - \cos t = 2\sin^2\tfrac{t}{2}$$

Remarque: on peut trouver la valeur trigo de $\frac{\pi}{12}$ ou $\frac{5\pi}{12}$ à l'aide de ces formules. Exemple :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Résoudre une équation trigonométrique

Ici, X est souvent une expression qui contient l'inconnue. Même en présence d'un « ou », tous les cas doivent être explicités : l'ensemble solution est la réunion des ensembles correspondants.

Type I. "trigo"=constante.

- $\sin(X) = b$: trouvons $X_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par une *valeur remarquable*, puis $X = X_0 + 2k\pi$ ou $X = \pi - X_0 + 2k\pi$, pout tout $k \in \mathbb{Z}$.

- $\cos(X) = b$: trouvons $X_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ par une *valeur remarquable*, puis $X = X_0 + 2k\pi$ ou $X = -X_0 + 2k\pi$, pout tout $k \in \mathbb{Z}$.

- $\tan(X) = b$: trouvons $X_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par une *valeur remarquable* ou *symétrique*, puis $X = X_0+k\pi$ pout tout $k \in \mathbb{Z}$. [Il faut toujour éliminer toute valeur interdite, $X \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.]

NB. 1. $\sin(X) = b$ et $\cos(X) = b$ n'ont aucune solution si $b > 1$ ou $b < -1$.
2. Dès qu'on enlève la fonction trigonométrique, il faut tout de suite ajouter $+2k\pi$ pour le sin et le cos, ou $+k\pi$ pour la tangente.

Par exemple, pour résoudre $\sin(3x) = 1/2$, on sait que $\sin(\pi/6) = 1/2$. Alors $3X = \pi/6 + 2k\pi$ ou $3X = 5\pi/6 + 2k\pi$, donc $X = \pi/18 + \frac{2k\pi}{3}$ ou $X = 5\pi/18 + \frac{2k\pi}{3}$, pourtout $k \in \mathbb{Z}$. [IL NE FAUT PAS ajouter $+2k\pi$ directement à x, mais bien à $3x$.]

Type II. "trigo"="trigo".

- $\sin(X) = \sin(Y)$: $X = Y + 2k\pi$ ou $X = \pi - Y + 2k\pi$, pout tout $k \in \mathbb{Z}$.

- $\cos(X) = \cos(Y)$: $X = Y + 2k\pi$ ou $X = -Y + 2k\pi$, pout tout $k \in \mathbb{Z}$.

- $\tan(X) = \tan(Y)$: $X = Y + k\pi$, et $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $Y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pout tout $k \in \mathbb{Z}$. [Il faut toujour éliminer toute valeur interdite.]

D'autres équations peuvent être transformées en ce type d'équation grâce aux *identités trigonométriques et à la symétrie.* Par exemple :

- L'équation $\sin(X) = \cos(Y)$ peut être réécrite sous la forme :

  $$\sin(X) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - Y\right)$$

  grâce à l'identité trigonométrique $\cos(Y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - Y\right)$.

  Cela nous ramène à une équation de type II, c'est-à-dire une équation de la forme :

  $$\sin(A) = \sin(B).$$

- L'équation $\cos(X) = -\cos(Y)$ peut être réécrite sous la forme : $\cos(X) = \cos(\pi + Y)$.

- L'équation $\sin(X) = -\sin(Y)$ peut être réécrite sous la forme : $\sin(X) = \sin(\pi + Y)$.

- L'équation $\sin(X) = -\cos(Y)$ peut être réécrite sous la forme :

  $$\sin(X) = -\sin(\frac{\pi}{2} - Y) = \sin(\frac{3\pi}{2} - Y).$$